Lösungen für die Ferienaufgaben für die 10. Jahrgangsstufe

Kreis und Kugel

1) Der Körper ist ein Kegel, aus dem eine Halbkugel ausgeschnitten ist.

Volumen: $V = \frac{1}{3}(2r)^2\pi \cdot 2r - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} r^3\pi = 2r^3\pi$

Mantellinie: $m = \sqrt{(2r)^2 + (2r)^2} = \sqrt{8} \cdot r$

Oberfläche: $O = r\pi m + (2r)^2\pi - r^2\pi \approx 7{,}8\, r^2\pi$

2) Großer Radius R, kleiner Radius r = 0,7 R

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi, \quad V' = \frac{4}{3}(0{,}7R)^3\pi = 0{,}343\, V \quad \rightarrow \quad um\ 65{,}7\%\ kleiner$$

$$O = 4\, R^2\pi, \quad O' = 4 \cdot (0{,}7R)^2\pi = 0{,}49\, O \quad \rightarrow \quad um\ 51\%\ kleiner$$

3) Fläche eines Dreiecks = $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2cm)^2 = \sqrt{3}\ cm^2$

Herzfläche: $A = 4 \cdot \sqrt{3}\ cm^2 + (1cm)^2\pi - 2 \cdot \frac{1}{6}(2cm)^2\pi \approx 5{,}88 cm^2$

Herzumfang: $U = 2 \cdot (1cm)\pi + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (2cm)\pi \approx 10{,}47\ cm$

Trigonometrie

1) a) $x_1 \approx 0{,}35 \quad x_2 = \pi - x_1 \approx 2{,}78$ b) $x_{1/2} \approx \pm 1{,}16 \quad x_{3/4} \approx 5{,}12$

2) Winkel mit positive x-Achse: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36{,}87°$

Schnittpkt: $S(1{,}6/3{,}2)$

Schnittwinkel: $36{,}87° - \tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 63{,}44°$

3) a) Cosinus-Funktion wird an der x-Achse gespiegelt und um 1 nach oben verschoben

Amplitude = 1, $\mathbb{W} = [0; 2]$, Nullstellen: $x_1 = 0, \quad x_2 = 2\pi$

b) $g(x) = -2\sin(3 \cdot (x - \frac{\pi}{6}))$

Sinuskurve wird um $\frac{\pi}{6}$ nach rechts verschoben, auf ein Drittel in x-Richtung gestaucht, an der x-Achse gespiegelt und auf das Doppelte in y-Richtung gestreckt.

Amplitude = 2, $\mathbb{W} = [-2; 2]$, Nullstellen: $\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{6}\pi, \dots\dots\dots . \frac{11}{6}\pi$

Exponentielles Wachstum und Logarithmen

1) $N(0) \cdot 0{,}8^2 = 960 \quad \Rightarrow N(0) = 1500$

$1500 \cdot 0{,}8^t < 1 \quad \Rightarrow \quad t > 32{,}77\ Stunden$

2)a) $2^x = 3^{2x} \quad \Longrightarrow \quad 2^x = 9^x \quad \Longrightarrow \quad x = 0$

b) $2^x = 3^{2x+1} \quad \Longrightarrow \quad 2^x = 9^x \cdot 3 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{2}{9}\right)^x = 3 \quad \Longrightarrow \quad x \approx -0{,}73$

c) $2^{2x} = 4^x \cdot 3^{x-2} \quad \Longrightarrow \quad 4^x = 12^x \cdot \frac{1}{9} \quad \Longrightarrow \quad x = 2$

3) $1{,}0115^x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 60{,}6\, Jahre$

4) a) $log_a \left(\frac{u^2}{u}\right) = log_a(u)$ $\qquad b)\ lg\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}\right) = \lg(a+b)$ $\qquad$ c) $log_a(x\sqrt{x})$

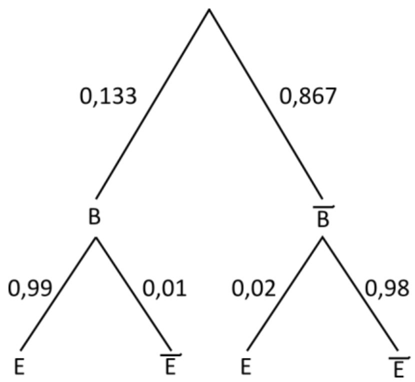
Zusammengesetzte Zufallsexperimente

a) $P_B(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der bereits vorhandene Brustkrebs seiner Frau korrekt ertastet wird. Diese Wahrscheinlichkeit sollte *groß* sein.

$P_{\bar{B}}(E)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau tatsächlich keinen Brustkrebs hat, aber ein Brustkrebs durch Ertasten diagnostiziert wird. Diese Wahrscheinlichkeit sollte *klein* sein.

$P_{\bar{E}}(\bar{B})$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, bei der kein Brustkrebs ertastet worden ist, tatsächlich auch keinen Brustkrebs hat. Diese Wahrscheinlichkeit sollte *groß* sein.

b)



c) Steht im Baumdiagramm: $P_B(\bar{E}) = 0{,}01 = 1\%$

d) Einzelwahrscheinlichkeiten entlang der Pfade addieren:

$P(\bar{E}) = 0{,}133 \cdot 0{,}01 + 0{,}867 \cdot 0{,}98 = 0{,}85099 \approx 85\%$

e) Vorarbeit:

$P(E)$ lässt sich mithilfe der Pfadregeln bestimmen:

$$P(E) = 0{,}133 \cdot 0{,}99 + 0{,}867 \cdot 0{,}02 = 0{,}14901.$$

Allerdings ist die Verwendung des Gegenereignisses schneller:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - 0{,}85099 = 0{,}14901 \approx 15\%$$

Für die Berechnung von $P_E(B)$ verwendet man die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit aus der Merkhilfe:

$$P_E(B) = \frac{P(E \cap B)}{P(E)} = \frac{0{,}133 \cdot 0{,}99}{0{,}14901} = 0{,}88363 \ldots \approx 88\%$$

f) Berechnen Sie $P(B \cap E) = P(B) \cdot P_B(E) = 0{,}133 \cdot 0{,}99 = 0{,}13167$ (siehe Baumdiagramm), tragen Sie anschließend die fett dargestellten Werte ein und vervollständigen Sie anschließend die Vierfeldertafel:

	B	$\bar{B}$	
E	$\mathbf{0{,}13167}$	0,01734	0,14901
$\bar{E}$	0,00133	0,84966	**0,85099**
	0,133	0,867	**1,00**

Ausbau der Funktionenlehre

1. Grenzwerte und Symmetrie

Bei Brüchen: Ausklammern der höchsten Nennerpotenz. Test auf Symmetrie über das Berechnen von f(-x):

a)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^5+x^3}{2x^5+3x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^5\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^5\left(2+\frac{3}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x^4}}=\frac{1}{2}$$

$$f(-x)=\frac{(-x)^5+(-x)^3}{2(-x)^5+3(-x)}=\frac{-x^5-x^3}{-2x^5-3x}=\frac{x^5+x^3}{2x^5+3x}=f(x)$$

⇒f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^3}{2x^4+3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^4\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x^2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5+x^3}{2x^4+3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^4\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x^2}}=-\infty$$

$$f(-x)=\frac{(-x)^5+(-x)^3}{2(-x)^4+3(-x)^2}=\frac{-x^5-x^3}{2x^4+3x^2}=-f(x)$$

⇒f ist punktsymmetrisch zum Ursprung

c)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^5+x^3}{2x^6+3x^5}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^6\left(2+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{3}{x}}=0$$

$$f(-x)=\frac{(-x)^5+(-x)^3}{2(-x)^6+3x^5}=\frac{-x^5-3x^3}{2x^6-3x^5}\neq\pm f(x)$$

⇒f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse, noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

d) sin(x) divergiert unbestimmt, da sin(x) seine Werte immer wieder zwischen 1 und -1 ändert. sin(x) ist bekanntlich punktsymmetrisch zum Ursprung.

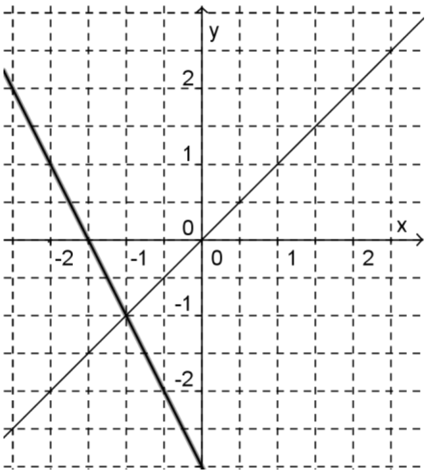
e) Da $\cos(x)$ bekanntlich achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt: $\cos(-x)=\cos(x)$:

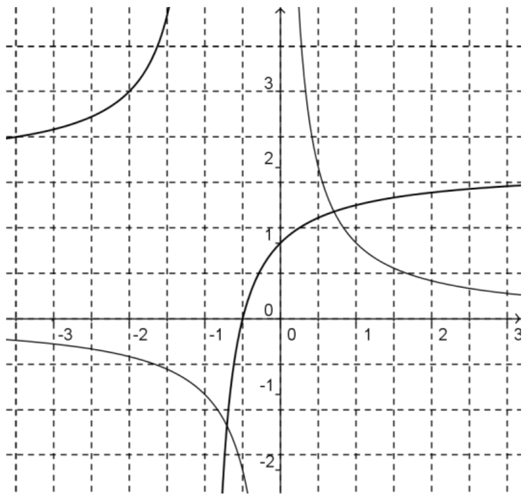
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cos(\mathrm{x})}{x}=0$$

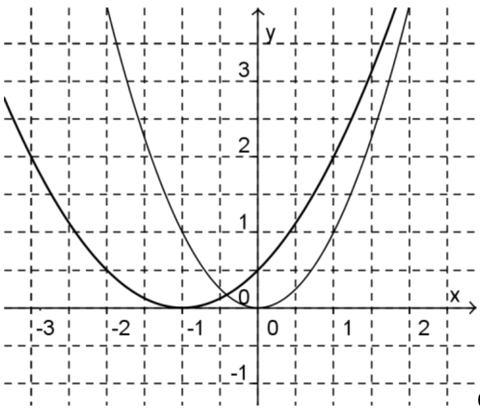
$$f(-x)=\frac{\cos(-\mathrm{x})}{-x}=\frac{cos(x)}{-x}=-f(x)$$

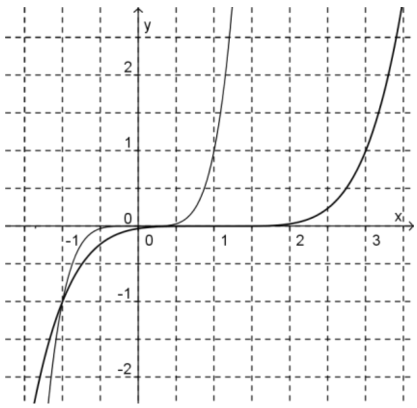
⇒f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

2. Manipulationen am Funktionsterm

a) 

b) 

c) 

d) 

3.) Zunächst f(x):

- Grenzwert: „Die höchste Potenz hat recht“:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3-3x-2=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3-3x-2=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)=-\infty$$

- Test auf Symmetrie:

$$f(-x)=(-x)^3-3(-x)-2=-x^3+3x-2\neq\pm f(x)$$

⇒ f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse, noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

- Schnittpunkt mit y-Achse: Berechne f(0): $f(0)=0^3-3\cdot 0-2=-2\Rightarrow P(0|-2)$
- Berechne Nullstellen über Polynomdivision. Rate: $x_1=-1$ (weil $f(-1)=0$)

$$\begin{array}{r l}
(x^3-3x-2):(x+1) & =x^2-x-2\\
-(x^3+x^2) & \\
\hline
-x^2-3x & \\
-(-x^2-x) & \\
\hline
-2x-2 & \\
-(-2x-2) & \\
\hline
\end{array}$$

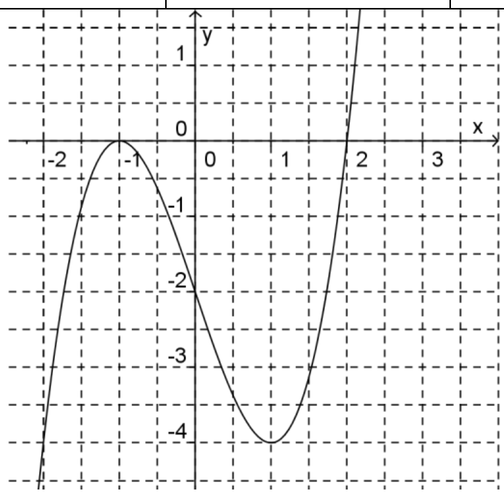
Ermittle restliche Nullstellen mithilfe der Lösungsformel:

$$x_{2/3} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_2 = 2; x_3 = -1$$

- Faktorisierte Form: $f(x) = (x-2)(x+1)^2$
- Vorzeichentabelle:

	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x$
$x-2$	-	-	+
$(x+1)^2$	+	+	+
$(x-2)(x+1)^2$	-	-	+



- Nun zu g(x):

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^4 - x^2 = \lim_{x \to \pm\infty} x^4 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$
$$g(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = g(x)$$

$\Rightarrow$ g ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

- Schnittpunkt mit y-Achse: Berechne g(0): $g(0) = 0^4 - 0^2 = 0 \Rightarrow P(0|0)$
- Ermittle Nullstellen durch Ausklammern der kleinsten überall vorhandenen Potenz (und 3. Binomischer Formel):

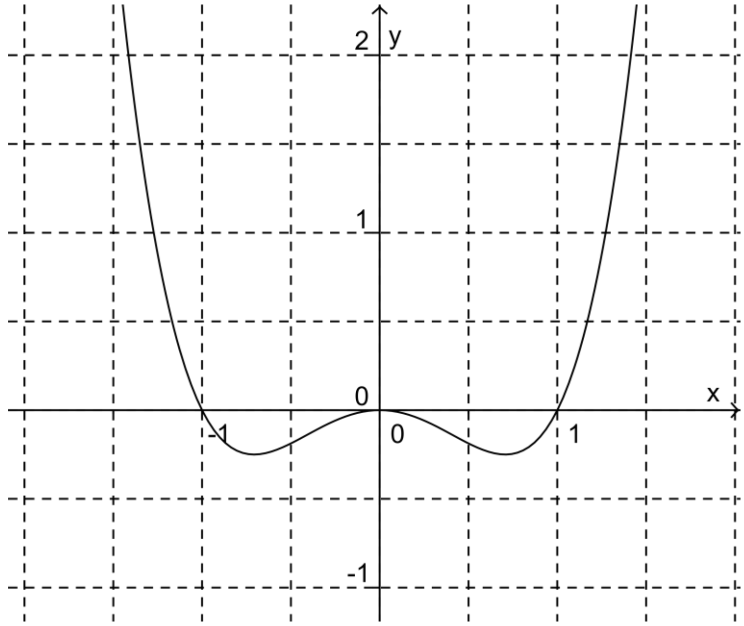
$$g(x) = x^2(x^2-1) = x^2\,(x-1)(x+1) = (x-0)^2(x-1)(x+1)$$

Statt der 3. Binomischen Formel kann man nach dem Ausklammern auch die Lösungsformel für $x^2 - 1$ verwenden:

$x_{3/4} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \pm 1$ ($x_{1/2} = 0$ wegen $(x-0)^2$)

- Vorzeichentabelle:

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x$
x^2	+	+	+	+
$(x-1)$	-	-	-	+
$(x+1)$	-	+	+	+
$x^2(x-1)(x+1)$	+	-	-	+


y
2
1
0
-1
x
-1
0
1